

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapă locală
Județul Alba, 13 februarie 2015****Clasa a XI-a**

1. Se consideră matricele $X \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{C})$, $Y \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{C})$ și $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A = XY$ și $\text{rang} X = 2$.

Demonstrați următoarele afirmații:

a) Dacă $n \geq 4$, atunci $A^* = O_n$, unde A^* este adjuncta matricei A .

b) $\text{rang} A = \text{rang} Y$.

c) Dacă $\text{rang} Y \neq 2$, atunci $A^2 = tA$, unde $t = \text{tr}(A)$.

2. Fie matricea nesară $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A + A^t) = 12$. Să se arate că

$$\det\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}A + \sqrt[3]{\frac{8}{3}}A^t\right) = 12 + \det A.$$

3. Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{45n} \left(-2^{-n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{-n+\ln\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2015n^2+k}}\right)} \right).$$

4. Se consideră numerele reale strict pozitive a, b, c și șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n = \frac{a}{b^n} + \frac{b}{c^n} + \frac{c}{a^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Demonstrați că dacă a, b sau $c \in (0,1)$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

b) Demonstrați că dacă $a, b, c \in [1, +\infty)$ și cel puțin două sunt diferite, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător.

c) Demonstrați că dacă $x_0 \leq x_1$, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Gazeta Matematică 10/2014(Enunț modificat)

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.